Détermination de la matrice sigma du faisceau dans l'espace 5D

Antoine CHANCE

CEA, IRFU, SACM, Centre de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France

29 janvier 2016

Résumé

Souvent, dans la littérature, la détermination de la matrice sigma d'un faisceau se fait avec la supposition que les plans horizontaux et verticaux sont découplés. De plus, l'émittance du faisceau est définie par rapport à ces plans. Nous proposons ici une méthodologie pour déterminer la matrice du faisceau dans le cas où le faisceau est initialement couplé mais également dans le cas où la ligne elle-même introduit du couplage. Nous traiterons enfin le cas où la ligne optique est également dispersive.

1 Notations

Dans toute la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

$X(s) = \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix}$	le vecteur 4 dimensions pour une particule à la position s.
$< . >$	la moyenne d'une quantité sur la distribution du faisceau.
$R(s)$	la matrice de transfert.
$\sigma(s)$	la matrice des moments d'ordre 2 du faisceau en s.
$J = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$	
$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	

Nous utiliserons l'indice 0 pour désigner les valeurs prises à l'abscisse s_0. Si nous nous donnons une liste de positions successives dans l'anneau (s_i), nous noterons $R^{(i)}$ la matrice de transfert de s_{i-1} à s_i et utiliserons l'exposant (i) pour désigner les valeurs prises en s_i. Nous supposerons que $\langle X(s) \rangle = 0$.

2 Propriétés préliminaires

2.1 Conséquences de la symplecticité

Par définition, $\sigma = \left\langle X(s)X(s)^T \right\rangle$. Par conséquent, on a :

$$\sigma(s) = R(s)\sigma_0 R(s)^T \tag{1}$$

Comme nous supposons que les forces sont conservatives, la matrice R est symplectique. Par conséquent :

$$R(s)^T J R(s) = R(s) J R(s)^T = J \tag{2}$$

Une propriété moins connue est que :

$$\sigma(s)J = R(s)\sigma_0 R(s)^T\ J = R(s)\sigma_0 J R(s)^{-1} \tag{3}$$

Une conséquence immédiate est que $\sigma(s)J$ et $\sigma_0 J$ sont similaires et ont donc les mêmes valeurs propres. Ces valeurs propres sont de la forme $\pm\imath\epsilon_k$. Nous appellerons les ϵ_k les émittances intrinsèques du faisceau. Ces quantités sont conservées au cours du transport. Ainsi, $\det\sigma$ et $\mathrm{Tr}((\sigma\cdot J)^2)$ sont des invariants du mouvement.

En diagonalisant σJ, on aboutit au fait qu'il existe une matrice symplectique S_0 telle que :

$$\sigma_0 = S_0 \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 I_2 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 I_2 \end{pmatrix} \cdot S_0^T$$

S_0 peut être interprêtée comme une matrice de passage qui va d'une configuration où les plans sont découplés à la matrice actuelle.

Un autre point est que la dimension de l'espace des matrices symplectiques à valeur dans $\mathcal{M}_{2n,2n}(\mathbb{R})$ est n(2n+1). Ainsi, en 2D les matrices symplectiques sont définies par 3 paramètres et en 4D par 10 paramètres.

2.2 Propriétés spécifiques à 2 dimensions

Dans cette sous-section, nous conservons les mêmes notations bien que nous travaillions dans un espace à 2 dimensions et non plus à 4 dimensions. La matrice σ s'écrit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} < x^2 > & < xp_x > \\ < xp_x > & < p_x^2 > \end{pmatrix}$$

Par définition, l'émittance du faisceau est donnée par :

$$\epsilon_x \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\det\sigma} = \sqrt{< x^2 >< p_x^2 > - < xp_x >^2} \tag{4}$$

On remarque que si $A_x = \sqrt{\frac{\epsilon_x}{<x^2>}} \begin{pmatrix} \frac{<x^2>}{\epsilon_x} & 0 \\ \frac{<xp_x>}{\epsilon_x} & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$\sigma = \epsilon_x A_x A_x^T$$

On posera alors les paramètres de Twiss du faisceau $\beta_x = \frac{<x^2>}{\epsilon_x}$ et $\alpha_x = \frac{<xp_x>}{\epsilon_x}$.

Une autre propriété utile est que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}), M^T J_2 M = (\det M) J_2 \tag{5}$$

Notons $P_M(X) = \det(M - XI)$ le polynôme caractéristique de M. Nous avons alors :

$$P_M(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(M)X + \det M \tag{6}$$

La matrice de transfert peut s'écrire :

$$R(s) = \tilde{A}_x(s)\mathcal{O}(\psi)\tilde{A}_x(0)^{-1} \tag{7}$$

avec $\tilde{A}_x = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\beta}_x}}\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_x & 0 \\ -\tilde{\alpha}_x & 1 \end{pmatrix}$ où $\tilde{\beta}_x$ et $\tilde{\alpha}_x$ sont les paramètres de Twiss de la machine et ψ_x l'avance de phase.

2.3 Propriétés spécifiques à 4 dimensions

Notons $R = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{pmatrix}$ la matrice de transfert.
R est symplectique donc $RJR^T = J$, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} R_{xx}J_2R_{xx}^T + R_{xy}J_2R_{xy}^T & R_{xx}J_2R_{yx}^T + R_{xy}J_2R_{yy}^T \\ R_{yx}J_2R_{xx}^T + R_{yy}J_2R_{xy}^T & R_{yx}J_2R_{yx}^T + R_{yy}J_2R_{yy}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

En utilisant (5), nous avons finalement :

$$\begin{cases} \det R_{xx} + \det R_{xy} = 1 \\ R_{xx}J_2R_{yx}^T = -R_{xy}J_2R_{yy}^T \\ \det R_{yx} + \det R_{yy} = 1 \end{cases}$$

Si R_{xx} est inversible alors $R_{yx} = R_{yy}J_2R_{xy}^TJ_2(R_{xx}^{-1})^T$.
En passant au déterminant, nous avons :

$$\begin{cases} \det R_{xy} = 1 - \det R_{xx} \\ \det R_{yx} = 1 - \det R_{yy} \\ \det R_{xx}\det R_{yx} = \det R_{xy}\det R_{yy} \end{cases}$$

Après résolution, nous avons :

$$\begin{cases} \det R_{xx} = \det R_{yy} \\ \det R_{xy} = \det R_{yx} = 1 - \det R_{xx} \end{cases} \tag{8}$$

Toute matrice de transfert peut s'écrire sous la forme :

$$R = S \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix} \cdot S_0^{-1} \tag{9}$$

avec S et S_0 2 matrices symplectiques définies chacune par 8 paramètres et $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ 2 matrices de rotation.

Démonstration. Considérons les matrices $R'' = RS_0$ et

$$R' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bI_2 & B \\ J_2B^TJ_2 & bI_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\psi_1) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\psi_2) \end{pmatrix}$$

où A_1 est définie par les 2 paramètres α_1 et β_1 :

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

A_2 est définie de la même façon. B est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, ψ_1 et ψ_2 sont 2 angles quelconques. De plus, b est définie par $b^2 = 1 - \det B$. Il est facile de démontrer que R' est symplectique. R' est définie alors par 10 paramètres : α_1, α_2, β_1, β_2, les 4 coefficents de B, ψ_1 et ψ_2.

Après calcul, R' s'écrit :

$$R' = \begin{pmatrix} bA_1\mathcal{O}(\psi_1) & A_1B\mathcal{O}(\psi_2) \\ A_2J_2B^TJ_2\mathcal{O}(\psi_1) & bA_2\mathcal{O}(\psi_2) \end{pmatrix}$$

On souhaite avoir l'égalité $R' = R''$. Ceci implique que :

$$\begin{cases} bA_1\mathcal{O}(\psi_1) = R''_{xx} \\ bA_2\mathcal{O}(\psi_2) = R''_{yy} \\ A_1B\mathcal{O}(\psi_2) = R''_{xy} \end{cases}$$

La première équation permet de déterminer complètement A_1, ψ_1 et $b = \det R''_{xx}$. La seconde équation permet de déterminer complètement A_2, ψ_2. Enfin, la dernière donne la matrice B avec la relation $B = A_1^{-1}R''_{xy}\mathcal{O}(\psi_2)^T$.

La matrice R peut donc s'écrire sous la forme :

$$R = S \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\psi_1) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\psi_2) \end{pmatrix} \cdot S_0^{-1}$$

où S est une matrice symplectique définie par 8 paramètres.

□

3 Cas d'un faisceau découplé, d'une optique découplée et pas de dispersion

Dans cette section, comme tous les plans sont découplés (matrice de transport et faisceau), nous nous plaçons en 2D. Nous noterons R_x la matrice de transfert et σ_x la matrice faisceau. Notons $\tilde{\sigma}_0 = \tilde{A}_x(0)^{-1}\sigma_0 \left(\tilde{A}_x(0)^{-1}\right)^T$. D'après l'Eq. (1) et (7), on obtient :

$$\sigma_x(s) = \tilde{A}_x(s)\mathcal{O}(\psi_x)\tilde{\sigma}_0\mathcal{O}(-\psi_x)\tilde{A}_x(s)^T$$

On trouve alors :

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \tilde{\beta}_x \left[\frac{\left\langle \tilde{x_0}^2 \right\rangle + \left\langle \tilde{p}_{x,0}^2 \right\rangle}{2} + \frac{\left\langle \tilde{x_0}^2 \right\rangle - \left\langle \tilde{p}_{x,0}^2 \right\rangle}{2} \cos(2\psi_x) + \langle \tilde{x}_0\tilde{p}_{x,0} \rangle \sin(2\psi_x) \right]$$

Les trois quantités à déterminer sont $\left\langle \tilde{x_0}^2 \right\rangle$, $\left\langle \tilde{p}_{x,0}^2 \right\rangle$ et $\langle \tilde{x}_0\tilde{p}_{x,0} \rangle$. En mesurant la taille du faisceau en différents points (typiquement aux avances de phase $\psi_x = 0°$, $\psi_x = 45°$et $\psi_x = 90°$), il est alors possible de remonter aux informations recherchées.

Dans le cas où le faisceau est adapté, les paramètres de Twiss du faisceau et de la machine sont égaux. Nous avons alors : $\sigma_{1,1} = \tilde{\beta}_x \epsilon_x$. Comme l'émittance est indépendante de la phase, on trouve $\epsilon_x = \frac{\left\langle \tilde{x_0}^2 \right\rangle + \left\langle \tilde{p}_{x,0}^2 \right\rangle}{2}$ dans ce cas.

Par analogie, dans le cas où le faisceau n'est pas adapté, nous posons $\bar{\epsilon}_x = \frac{\left\langle \tilde{x_0}^2 \right\rangle + \left\langle \tilde{p}_{x,0}^2 \right\rangle}{2}$ l'émittance qu'aurait le faisceau s'il était adapté. Par la même occasion, nous posons :

$$B_C = \frac{\left\langle \tilde{x_0}^2 \right\rangle - \left\langle \tilde{p}_{x,0}^2 \right\rangle}{2} \mathrm{et} B_S = \langle \tilde{x}_0 \tilde{p}_{x,0} \rangle$$

Nous avons alors :

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 + B_C \cos(2\psi_x) - B_S \sin(2\psi_x) & -\left(B_S \cos(2\psi_x) + B_C \sin(2\psi_x)\right) \\ -\left(B_S \cos(2\psi_x) + B_C \sin(2\psi_x)\right) & 1 - B_C \cos(2\psi_x) + B_S \sin(2\psi_x) \end{pmatrix}$$

Comme $\epsilon_x^2 = \det \sigma = \det \tilde{\sigma}$, nous avons

$$\epsilon_x = \bar{\epsilon}_x \sqrt{1 - B_C^2 - B_S^2}$$

Les paramètres de Twiss du faisceau se déduisent de ce que :

$$\begin{aligned} \left\langle x_0^2 \right\rangle &= \beta_{x,0} \epsilon_x = \tilde{\beta}_{x,0} \left\langle \tilde{x}_0^2 \right\rangle = \tilde{\beta}_{x,0} \left(1 + B_c\right) \bar{\epsilon}_x \\ \langle x_0 p_{x,0} \rangle &= \alpha_{x,0} \epsilon_x = \langle \tilde{x}_0 \tilde{p}_{x,0} \rangle + \tilde{\alpha}_{x,0} \left\langle \tilde{x}_0^2 \right\rangle = \left[B_S + \tilde{\alpha}_{x,0} \left(1 + B_c\right)\right] \bar{\epsilon}_x \end{aligned}$$

Finalement, nous avons :

$$\begin{aligned} \beta_{x,0} &= \tilde{\beta}_{x,0} (1 + B_C) \frac{\bar{\epsilon}_x}{\epsilon_x} \\ \alpha_{x,0} &= \frac{\beta_{x,0}}{\tilde{\beta}_{x,0}} \alpha_{x,0} + B_S \frac{\bar{\epsilon}_x}{\epsilon_x} \end{aligned}$$

4 Cas d'un faisceau couplé, d'une optique découplée et pas de dispersion

Dans ce cas, nous ne pouvons plus rester en 2D et nous plaçons en 4D. la matrice de transfert et la matrice σ du faisceau sont alors de la forme :

$$R(s) = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ 0 & R_y \end{pmatrix}, \sigma(s) = \begin{pmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} \end{pmatrix}$$

Les paramètres de Twiss de la machine sont définis comme précédemment et en procédant comme avant, nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(s) &= \tilde{A}_x(s) \mathcal{O}(\psi_x) \tilde{\sigma}_{xx,0} \mathcal{O}(-\psi_x) \tilde{A}_x(s)^T \\ \sigma_{xy}(s) &= \tilde{A}_x(s) \mathcal{O}(\psi_x) \tilde{\sigma}_{xy,0} \mathcal{O}(-\psi_y) \tilde{A}_y(s)^T \\ \sigma_{yx}(s) &= \tilde{A}_y(s) \mathcal{O}(\psi_y) \tilde{\sigma}_{yx,0} \mathcal{O}(-\psi_x) \tilde{A}_x(s)^T \\ \sigma_{yy}(s) &= \tilde{A}_y(s) \mathcal{O}(\psi_y) \tilde{\sigma}_{yy,0} \mathcal{O}(-\psi_y) \tilde{A}_y(s)^T \end{aligned}$$

Après calcul, nous obtenons :

$$\frac{\left\langle x^2 \right\rangle}{\tilde{\beta}_x} = \frac{1}{2} \left[\tilde{\sigma}_{0,11} + \tilde{\sigma}_{0,22}\right] + \frac{1}{2} \left[\tilde{\sigma}_{0,11} - \tilde{\sigma}_{0,22}\right] \cos(2\psi_x) + \tilde{\sigma}_{0,12} \sin(2\psi_x)$$

$$\frac{\langle xy\rangle}{\sqrt{\tilde\beta_x\tilde\beta_y}} =$$

$$\frac{\tilde\sigma_{0,13}+\tilde\sigma_{0,24}}{2}\cos(\psi_x-\psi_y)+\frac{\tilde\sigma_{0,23}-\tilde\sigma_{0,14}}{2}\sin(\psi_x-\psi_y)+ \frac{\tilde\sigma_{0,13}-\tilde\sigma_{0,24}}{2}\cos(\psi_x+\psi_y)+\frac{\tilde\sigma_{0,23}+\tilde\sigma_{0,14}}{2}\sin(\psi_x+\psi_y)$$

Ici, quatre positions différentes pour les mesures sont nécessaires afin de déterminer les termes de $\sigma_{0,xy}$ alors que trois étaient nécessaires dans le cas précédent pour $\sigma_{0,xx}$. Pour ce faire, il est nécessaire de mesurer la valeur de $\langle xy\rangle$ en même temps que celle de $\langle x^2\rangle$ et $\langle y^2\rangle$.

Ceci peut être fait simplement en constatant que :

$$\langle xy\rangle = \langle u^2\rangle - \frac{\langle x^2\rangle+\langle y^2\rangle}{2}$$

où $\langle u^2\rangle$ est la taille rms du faisceau dans la direction 45°.

5 Cas d'un faisceau couplé, d'une optique avec couplage et pas de dispersion

Dans ce cas, la matrice de transfert et la matrice σ du faisceau sont alors de la forme :

$$R(s)=\begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy}\\ R_{yx} & R_{yy}\end{pmatrix},\ \sigma(s)=\begin{pmatrix}\sigma_{x,x} & \sigma_{x,y}\\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y}\end{pmatrix}$$

Du fait que la matrice faisceau n'est pas découplée, la définition d'avances de phase comme précédemment n'est pas immédiate.

5.1 Factorisation de la matrice de transfert

Soit S_0 une matrice symplectique arbitraire. Il existe une matrice S telle que la matrice de transfert s'écrive :

$$R = S\cdot\begin{pmatrix}\mathcal{O}_1 & 0\\ 0 & \mathcal{O}_2\end{pmatrix}\cdot S_0^{-1}$$

Il a été démontré pour l'Eq. (9) que la matrice S pouvait être factorisée sous la forme :

$$S=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} bI_2 & B\\ J_2B^TJ_2 & bI_2\end{pmatrix} \tag{10}$$

où $B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $b^2=1-\det B$.

Posons $\hat\sigma_0 = S_0\sigma_0S_0^T$. Nous avons alors :

$$\sigma=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b\mathcal{O}_1 & B\mathcal{O}_2\\ J_2B^TJ_2\mathcal{O}_1 & b\mathcal{O}_2\end{pmatrix}\hat\sigma_0\begin{pmatrix} b\mathcal{O}_1 & B\mathcal{O}_2\\ J_2B^TJ_2\mathcal{O}_1 & b\mathcal{O}_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}^T$$

Ainsi, nous avons les relations :

$$\frac{\langle x^2 \rangle}{\beta_1} = \begin{bmatrix} b\cos\psi_1 \\ b\sin\psi_1 \\ B_{11}\cos\psi_2 - B_{12}\sin\psi_2 \\ B_{11}\sin\psi_2 + B_{12}\cos\psi_2 \end{bmatrix}^T \hat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} b\cos\psi_1 \\ b\sin\psi_1 \\ B_{11}\cos\psi_2 - B_{12}\sin\psi_2 \\ B_{11}\sin\psi_2 + B_{12}\cos\psi_2 \end{bmatrix} \tag{11a}$$

$$\frac{\langle y^2 \rangle}{\beta_2} = \begin{bmatrix} -B_{22}\cos\psi_1 - B_{12}\sin\psi_1 \\ -B_{22}\sin\psi_1 + B_{12}\cos\psi_1 \\ b\cos\psi_2 \\ b\sin\psi_2 \end{bmatrix}^T \hat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} -B_{22}\cos\psi_1 - B_{12}\sin\psi_1 \\ -B_{22}\sin\psi_1 + B_{12}\cos\psi_1 \\ b\cos\psi_2 \\ b\sin\psi_2 \end{bmatrix} \tag{11b}$$

$$\frac{\langle xy \rangle}{\sqrt{\beta_1\beta_2}} = \begin{bmatrix} b\cos\psi_1 \\ b\sin\psi_1 \\ B_{11}\cos\psi_2 - B_{12}\sin\psi_2 \\ B_{11}\sin\psi_2 + B_{12}\cos\psi_2 \end{bmatrix}^T \hat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} -B_{22}\cos\psi_1 - B_{12}\sin\psi_1 \\ -B_{22}\sin\psi_1 + B_{12}\cos\psi_1 \\ b\cos\psi_2 \\ b\sin\psi_2 \end{bmatrix} \tag{11c}$$

Nous avons donc une relation matricielle entre la matrice faisceau $\hat{\sigma}_0$ que nous cherchons à déterminer et les tailles faisceaux. Les coefficients de la matrice font apparaitre les avances de phase ψ_1 et ψ_2 ainsi que $\psi_1 \pm \psi_2$. Il est alors nécessaire de choisir judicieusement les positions des détecteurs afin de bien discriminer les différentes mesures. Comme $\hat{\sigma}_0$ comprend 10 paramètres libres, au moins 10 mesures sont nécessaires.

Comme nous utilisons la matrice B et les avances de phase ψ_1 et ψ_2 pour caractériser le transport plutôt que la matrice R, il est nécessaire de déterminer une relation qui donne la variation de B le long de la ligne.

5.1.1 Transport de la matrice B

L'évolution des paramètres suit la loi suivante :

$$b^{(1)}A_1^{(1)}\mathcal{O}_1^{(1)} = b^{(0)}R_{xx}A_1^{(0)} + R_{xy}A_2^{(0)}J_2(B^{(0)})^T J_2 \tag{12}$$

$$b^{(1)}A_2^{(1)}\mathcal{O}_2^{(1)} = b^{(0)}R_{yy}A_2^{(0)} + R_{yx}A_1^{(0)}B^{(0)} \tag{13}$$

$$B^{(1)} = \frac{1}{b^{(0)}}\left[b^{(1)}\mathcal{O}_1^{(1)}B^{(0)}(\mathcal{O}_2^{(1)})^T + (A_1^{(1)})^{-1}R_{xy}A_2^{(0)}(\mathcal{O}_2^{(1)})^T\right] \tag{14}$$

Démonstration. D'après (9) et (10), nous avons :

$$RS_0 = S \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 A_{0,x} & A_{0,x}B_0 \\ A_{0,y}J_2B_0^T J_2 & b_0 A_{0,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bA_x & A_xB \\ A_yJ_2B^TJ_2 & bA_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix}$$

Ceci implique que :

$$\begin{cases} b_0R_{xx}A_{0,x} + R_{xy}A_{0,y}J_2B_0^TJ_2 = bA_x\mathcal{O}_1 \\ b_0R_{yy}A_{0,y} + R_{yx}A_{0,x}B_0 = bA_y\mathcal{O}_2 \\ R_{xx}A_{0,x}B_0 + b_0R_{xy}A_{0,y} = A_xB\mathcal{O}_2 \end{cases}$$

En substituant la première ligne dans la dernière, nous obtenons :

$$B = \frac{1}{b_0} A_x^{-1} \left[b A_x \mathcal{O}_1 B_0 + R_{xy} A_{0,y} \left(b_0^2 I_2 - J_2 B_0^T J_2 B_0 \right) \right] \mathcal{O}_2^T$$

En utilisant (5), nous avons finalement :

$$B = \frac{1}{b_0} \left[b \mathcal{O}_1 B_0 + A_x^{-1} R_{xy} A_{0,y} \right] \mathcal{O}_2^T$$

□

Dans une portion où la matrice de transfert est découplée alors $R_{xy} = R_{yx} = 0$ et nous avons simplement :

$$\begin{aligned} b^{(1)} A_1^{(1)} \mathcal{O}_1^{(1)} &= b^{(0)} R_{xx} A_1^{(0)} \\ b^{(1)} A_2^{(1)} \mathcal{O}_2^{(1)} &= b^{(0)} R_{yy} A_2^{(0)} \\ B^{(1)} &= \frac{b^{(1)}}{b^{(0)}} \mathcal{O}_1^{(1)} B^{(0)} (\mathcal{O}_2^{(1)})^T \end{aligned}$$

La première équation permet d'avoir $b^{(1)} = b^{(0)}$ en passant au déterminant et donc nous avons $B^{(1)} = \mathcal{O}_1^{(1)} B^{(0)} (\mathcal{O}_2^{(1)})^T$.

La matrice B évolue simplement en $B = \mathcal{O}(\psi_x) B_0 \mathcal{O}(\psi_y)^T$ où ψ_x et ψ_y sont les avances de phase dans chaque plan en supposant que les paramètres de Twiss en entrée sont ceux donnés .

5.1.2 Diagonalisation de la matrice faisceau

Dans la phase préliminaire, nous avons montré qu'il existe une matrice symplectique S_0 telle que la matrice faisceau initiale puisse s'écrire :

$$\sigma_0 = S_0 \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 I_2 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 I_2 \end{pmatrix} \cdot S_0^T \tag{15}$$

Il est à noter que si $S_0' = S_0 \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2) \end{pmatrix}$ avec θ_1, θ_2 2 angles quelconques alors nous avons toujours l'égalité :

$$\sigma_0 = S_0' \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 I_2 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 I_2 \end{pmatrix} \cdot (S_0')^T$$

Ainsi, la matrice S_0 est définie à ces 2 rotations près. Elle est donc définie par 8 paramètres (les 2 autres paramètres étant donnés par la valeur de ces 2 angles). S_0 peut être interprêtée comme la matrice de transfert d'une ligne qui transporte le faisceau vers sa forme normale.

Choisissons arbitrairement $\hat{S}_0$ une matrice symplectique telle que :

$$\sigma_0 = \hat{S}_0 \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 I_2 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 I_2 \end{pmatrix} \cdot \hat{S}_0^T \tag{16}$$

D'après (9), il existe une matrice symplectique $\hat{S}$ définie par 8 paramètres telle que la matrice de transfert s'écrive :

$$R = \hat{S} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix} \cdot \hat{S}_0^{-1}$$

En utilisant (16), nous avons finalement :

$$\sigma = \hat{S} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 I_2 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 I_2 \end{pmatrix} \cdot \hat{S}^T \tag{17}$$

Nous utliserons la forme factorisée de $\hat{S}$:

$$S = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{b} I_2 & \hat{B} \\ J_2 \hat{B}^T J_2 & \hat{b} I_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Après calcul, on a :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \hat{b}\hat{A}_1 & \hat{A}_1 \hat{B} \\ \hat{A}_2 J_2 \hat{B}^T J_2 & \hat{b} A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 I_2 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}\hat{A}_1^T & J_2 \hat{B} J_2 \hat{A}_2^T \\ \hat{B}^T \hat{A}_1^T & \hat{b}\hat{A}_2^T \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \hat{A}_1(\epsilon_1 \hat{b}^2 I_2 + \epsilon_2 \hat{B}\hat{B}^T)\hat{A}_1^T & \hat{b}\hat{A}_1(\epsilon_1 J_2 \hat{B} J_2 + \epsilon_2 \hat{B})\hat{A}_2^T \\ \hat{b}\hat{A}_2(\epsilon_1 J_2 \hat{B}^T J_2 + \epsilon_2 \hat{B}^T)\hat{A}_1^T & \hat{A}_2(\epsilon_2 \hat{b}^2 I_2 - \epsilon_1 J_2 \hat{B}^T \hat{B} J_2)\hat{A}_2^T \end{pmatrix} \tag{20}$$

Par définition, l'émittance projetée ϵ_x est donnée par : $\epsilon_x^2 = \det \sigma_{xx}$. Ainsi, nous avons :

$$\epsilon_x^2 = \det(\epsilon_1 \hat{b}^2 I_2 + \epsilon_2 \hat{B}\hat{B}^T)$$

On reconnaît le polynôme caractéristique de $\epsilon_2 \hat{B}\hat{B}^T$ calculé en $-\epsilon_1 \hat{b}^2$. Donc d'après (6), nous avons :

$$\epsilon_x^2 = \Big((1 - \det \hat{B})^2 \epsilon_1^2 + (1 - \det \hat{B}) Tr(\hat{B}\hat{B}^T)\epsilon_1\epsilon_2 + \det(\hat{B})^2 \epsilon_2^2\Big) \tag{21}$$

De même, nous obtenons :

$$\epsilon_y^2 = (1 - \det \hat{B})^2 \epsilon_2^2 + (1 - \det \hat{B}) Tr(\hat{B}\hat{B}^T)\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1^2 \det(\hat{B})^2 \tag{22}$$

Notons $\hat{B}_L = \begin{pmatrix} \hat{B}_{11} \\ \hat{B}_{21} \end{pmatrix}$ et $\hat{B}_R = \begin{pmatrix} \hat{B}_{21} \\ \hat{B}_{22} \end{pmatrix}$.
Ainsi, nous avons

$$\sigma_{yy} = \hat{A}_2 \begin{pmatrix} \epsilon_2(1 - \det \hat{B}) + \epsilon_1 \|\hat{B}_R\|^2 & -\epsilon_1 \hat{B}_L.\hat{B}_R \\ -\epsilon_1 \hat{B}_L.\hat{B}_R & \epsilon_2(1 - \det \hat{B}) + \epsilon_1 \|\hat{B}_L\|^2 \end{pmatrix} \hat{A}_2^T$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\langle y^2 \rangle = \hat{\beta}_y \Big[(1 - \det \hat{B})\epsilon_2 + \|\hat{B}_R\|^2 \epsilon_1\Big] \tag{23}$$

$$\langle y p_y \rangle = -\alpha_y \Big[(1 - \det \hat{B})\epsilon_2 + \|\hat{B}_R\|^2 \epsilon_1\Big] - \hat{B}_L.\hat{B}_R \epsilon_1 \tag{24}$$

$$\langle p_y^2 \rangle = \frac{1}{\hat{\beta}_y} \Big[(1 + \hat{\alpha}_y^2)(1 - \det \hat{B})\epsilon_2 + (\|\hat{B}_L\|^2 + 2\hat{\alpha}_y \hat{B}_L.\hat{B}_R + \hat{\alpha}_y^2 \|\hat{B}_L\|^2)\epsilon_1\Big] \tag{25}$$

5.2 Autre factorisation de S

Précédemment, nous avons supposé que la matrice B était quelconque. Dans l'expression de σ (Eq. (20)), le produit BB^T intervient dans la diagonale. L'idée est alors de chercher R sous la forme d'un produit de transformations où B serait colinéaire à une matrice orthogonale. Or, nous savons que les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ sont soit les matrices de rotation $\mathcal{O}(\psi)$ soit les matrices de type $S_2\mathcal{O}(\psi)$ avec $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de symétrie.

L'idée est donc de considérer la matrice de transfert comme le produit de 3 matrices de transfert $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ et $R^{(3)}$, qui sont de la forme :

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & 0 \\ 0 & A_2^{(1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 I_2 & c_1\mathcal{O}(\psi_1) \\ -c_1\mathcal{O}(\psi_1)^T & b_1 I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1^{(1)}) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2^{(1)}) \end{pmatrix} \cdot S_0^{-1} \tag{26}$$

$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} A_1^{(2)} & 0 \\ 0 & A_2^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 I_2 & c_2 S_2\mathcal{O}(\psi_2) \\ c_2 S_2\mathcal{O}(\psi_2) & b_2 I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1^{(2)}) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2^{(2)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & 0 \\ 0 & A_2^{(1)} \end{pmatrix}^{-1} \tag{27}$$

$$R^{(3)} = \begin{pmatrix} A_1^{(3)} & 0 \\ 0 & A_2^{(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1^{(3)}) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2^{(3)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1^{(2)} & 0 \\ 0 & A_2^{(2)} \end{pmatrix}^{-1} \tag{28}$$

$$c_1 = \sqrt{1 - b_1^2} \tag{29}$$

$$c_2 = \sqrt{b_2^2 - 1} \tag{30}$$

Ainsi, la matrice totale de transfert est de la forme :

$$\begin{aligned} R = & \begin{pmatrix} A_1^{(3)} & 0 \\ 0 & A_2^{(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1^{(3)}) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2^{(3)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 I_2 & c_2 S_2\mathcal{O}(\psi_2) \\ c_2 S_2\mathcal{O}(\psi_2) & b_2 I_2 \end{pmatrix} \cdot \\ & \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1^{(2)}) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2^{(2)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 I_2 & c_1\mathcal{O}(\psi_1) \\ -c_1\mathcal{O}(\psi_1)^T & b_1 I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1^{(1)}) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2^{(1)}) \end{pmatrix} \cdot S_0^{-1} \\ R = & \begin{pmatrix} A_1^{(3)} & 0 \\ 0 & A_2^{(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1^{(3)}) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2^{(3)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 I_2 & c_2 S_2\mathcal{O}(\psi_2) \\ c_2 S_2\mathcal{O}(\psi_2) & b_2 I_2 \end{pmatrix} \cdot \\ & \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1^{(3)}) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2^{(3)}) \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1^{(2)} + \theta_1^{(3)}) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2^{(2)} + \theta_2^{(3)}) \end{pmatrix} \cdot \\ & \begin{pmatrix} b_1 I_2 & c_1\mathcal{O}(\psi_1) \\ -c_1\mathcal{O}(\psi_1)^T & b_1 I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1^{(2)} + \theta_1^{(3)}) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2^{(2)} + \theta_2^{(3)}) \end{pmatrix}^T \cdot \\ & \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\theta_1^{(1)} + \theta_1^{(2)} + \theta_1^{(3)}) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)} + \theta_2^{(3)}) \end{pmatrix} \cdot S_0^{-1} \end{aligned} \tag{31}$$

Posons $g_+ = b_2$, $g_- = b_1$, $\psi_+ = \psi_2 - \theta_1^{(3)} - \theta_2^{(3)}$ et $\psi_- = \psi_1 + \theta_1^{(2)} + \theta_1^{(3)} - \theta_2^{(2)} - \theta_2^{(3)}$. Posons les matrices définies par :

$$G_+ = \sqrt{g_+^2 - 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{O}(\psi_+) \qquad \to \text{'co-roll'} \tag{32}$$

$$G_- = \sqrt{1 - g_-^2}\,\mathcal{O}(\psi_-) \qquad \to \text{'roll'} \tag{33}$$

Une interprêtation possible de G_+ et de G_- est de les écrire sous la forme d'un produit de transformations élémentaires :

$$G_- = \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O}\left(\frac{\psi_+}{2}\right) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}\left(\frac{\psi_+}{2}\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\theta_+ I_2 & \sinh\theta_+ I_2 \\ \sinh\theta_+ I_2 & \cosh\theta_+ I_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}\left(\frac{\psi_+}{2}\right)^T & 0 \\ 0 & \mathcal{O}\left(\frac{\psi_+}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$G_- = \begin{pmatrix} \mathcal{O}\left(\frac{\psi_-}{2}\right) & 0 \\ 0 & \mathcal{O}\left(\frac{\psi_-}{2}\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_- I_2 & \sin\theta_- I_2 \\ -\sin\theta_- I_2 & \cos\theta_- I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O}\left(\frac{\psi_-}{2}\right)^T & 0 \\ 0 & \mathcal{O}\left(\frac{\psi_-}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{35}$$

avec $\cosh\theta_+ = g_+$ et $\cos\theta_- = g_-$.

Pour les 2 matrices, la matrice centrale est celle d'un simple roll. Les matrices encadrant le roll sont des isométries n'introduisant pas de couplage entre les plans (x, p_x) et (y, p_y).

La matrice S peut donc être factorisée sous la forme :

$$S = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_+ I_2 & G_+ \\ G_+ & g_+ I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_- I_2 & G_- \\ -G_-^T & g_- I_2 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Dans le cas où la ligne de transport n'introduit pas de couplage alors à $\theta_1^{(1,2)}$, on ajoute l'angle de rotation dans l'espace des phases $\psi_{x,y}$. Ceci a pour effet de changer la valeur de $\psi_\pm$ en $\psi_\pm \mp \psi_x - \psi_y$.

Après calcul, on trouve :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \left[(g_+^2 + g_-^2 - 1)\epsilon_1 + (g_+^2 - g_-^2)\epsilon_2\right] I_2 \\ & - 2g_+ g_- \sqrt{g_+^2 - 1}\sqrt{1 - g_-^2}(\epsilon_2 - \epsilon_1) S_2 \mathcal{O}(\psi_+ - \psi_-) \end{aligned} \tag{37}$$

Les émittances projetées sont alors donnéees par :

$$\epsilon_x^2 = \left[(g_+^2 + g_-^2 - 1)\epsilon_1 + (g_+^2 - g_-^2)\epsilon_2\right]^2 + 4g_+^2 g_-^2 (1 - g_+^2)(1 - g_-^2)(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 \tag{38}$$
$$\epsilon_y^2 = \left[(g_+^2 + g_-^2 - 1)\epsilon_2 + (g_+^2 - g_-^2)\epsilon_1\right]^2 + 4g_+^2 g_-^2 (1 - g_+^2)(1 - g_-^2)(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 \tag{39}$$

5.3 Factorisation de σ avec une matrice de couplage

Afin d'extraire certaines propriétés de la matrice faisceau, nous allons introduire une matrice de couplage. Ceci permettra d'établir des relations entre les émittances intrinsèques du faisceau et celles liées aux projections sur les plans horizontal et vertical. Nous avons vu dans le cas à 2 dimensions que tout matrice symétrique de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ pouvait s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{xx} = \epsilon_x A_x A_x^T$$

Avec $A_x = \frac{1}{\sqrt{\beta_x}} \begin{pmatrix} \beta_x & 0 \\ -\alpha_x & 1 \end{pmatrix}$ où β_x, α_x et ϵ_x sont trois paramètres définis en (4). Une interprêtation possible de ϵ_x est de la voir comme l'émittance du faisceau après projection dans le plan (x, p_x).

Comme σ_{xx} et σ_{yy} sont symétriques, nous pouvons les écrire sous cette forme. Nous introduisons ainsi 6 paramètres $\beta_{x,y}$, $\alpha_{x,y}$, $\epsilon_{x,y}$ définissant les 2 matrices A_x et A_y.

Nous introduisons la matrice de couplage C définie par :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}} A_x^{-1} \sigma_{xy} \left(A_y^{-1}\right)^T$$

Par ce biais, la matrice σ peut être factorisée sous la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon_x} A_x & 0 \\ 0 & \sqrt{\epsilon_y} A_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_2 & C \\ C^T & I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon_x} A_x & 0 \\ 0 & \sqrt{\epsilon_y} A_y \end{pmatrix}^T \tag{40}$$

C peut s'écrire sous la forme :

$$C = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 c_1 \\ s_3 c_1 & s_4 c_3 c_2 - s_3 s_2 s_1 \end{pmatrix}$$

avec $c_i = \cos\theta_i$ et $s_i = \sin\theta_i$ avec θ_i 4 angles apartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5.3.1 Interprêtation de la matrice C

Considérons 2 plans P_x et P_y définis par les couples respectifs de vecteurs $(e_{x,1}, e_{x,2})$ et $(e_{y,1}, e_{y,2})$. Plaçons-nous dans le cas où ces 2 plans sont supplémentaires.

Ainsi, $(e_{x,1}, e_{x,2}, e_{y,1}, e_{y,2})$ forment une base de $\mathbb{R}^4$.

Notons $\mathcal{O}_{i,j}(\theta)$ la matrice de rotation définie par :

$$\begin{cases} (O_{i,j})_{kk} = 1 \text{ si } k \neq i \text{ et } k \neq j \\ (O_{i,j})_{ii} = (O_{i,j})_{jj} = \cos\theta \\ (O_{i,j})_{ij} = -(O_{i,j})_{ji} = \sin\theta \\ (O_{i,j})_{kk} = 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$$

Considérons le produit $F = \mathcal{O}_{2,3}(\theta_3)\mathcal{O}_{1,3}(\theta_1)\mathcal{O}_{2,4}(\theta_4)\mathcal{O}_{1,4}(\theta_2)$. Chacune de ces rotations laisse invariant un plan constitué par un couple de la base et effectue une rotation sur le plan défini par l'autre couple. En choisissant les différents angles θ, il est alors possible de faire en sorte que l'image de P_2 par F soit P_1. Par analogie avec le cas 3D, les angles θ peuvent être vus comme des angles d'Euler.

Si l'on écrit F sous la forme de matrices par blocs, nous obtenons :

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$$

F_2 a exactement la même forme que la matrice de couplage C introduite précédemment.

5.3.2 Invariants du mouvement

Nous avons vu que 2 invariants du mouvement étaient $\det\sigma$ et $\mathrm{Tr}((\sigma J)^2)$.

Une autre façon de factoriser la matrice σ est d'écrire :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon_x} A_x & 0 \\ \sqrt{\epsilon_y} A_y C^T & \sqrt{\epsilon_y} A_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon_x} A_x^T & \sqrt{\epsilon_y} C A_y^T \\ 0 & \sqrt{\epsilon_y}\left(I_2 - C^T C\right) A_y^T \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous obtenons pour le premier invariant :

$$\det\sigma = \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 = \epsilon_x^2 \epsilon_y^2 \det\left(I_2 - C^T C\right)$$

En utilisant Eq. (6), nous avons alors la première égalité :

$$(\epsilon_1\epsilon_2)^2 = (\epsilon_x\epsilon_y)^2\left[1 - Tr(CC^T) + \det(CC^T)\right] \quad (41)$$

En remarquant que :

$$\sigma J\sigma J = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}J_2\sigma_{xx}^T J_2 + \sigma_{xy}J_2\sigma_{xy}^T J_2 & M_1 \\ M_2 & \sigma_{yy}J_2\sigma_{yy}^T J_2 + \sigma_{yx}J_2\sigma_{yx}^T J_2 \end{pmatrix}$$

et en utilisant (5), nous avons finalement l'égalité :

$$-\frac{1}{2}Tr((\sigma J)^2) = \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 = \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\epsilon_x\epsilon_y \det C \quad (42)$$

En remarquant que $1 - Tr(CC^T) + \det(CC^T) = c_1^2c_2^2c_3^2c_4^2 \leq 1$ et l'Eq. (41), nous obtenons l'inégalité de Rivkin :

$$\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_x\epsilon_y c_1c_2c_3c_4 \leq \epsilon_x\epsilon_y \quad (43)$$

Le produit des émittances projetées est toujours supérieur à celui des émittances intrinsèques. L'égalité n'a lieu que si $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ et donc $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$. Dans ce cas, C est nulle et donc σ_{xy} aussi. L'égalité n'a donc lieu que si les 2 plans sont découplés.

5.4 Quelques exemples d'application

5.4.1 Cas d'un roulement

La matrice de transfert d'un simple roulement d'angle θ s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta I_2 & \sin\theta I_2 \\ -\sin\theta I_2 & \cos\theta I_2 \end{pmatrix} \quad (44)$$

La faisceau est supposé découplé avant le roulement. Sa matrice faisceau s'écrit alors :

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} A_x & 0 \\ 0 & A_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \epsilon_1 I_2 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x & 0 \\ 0 & A_y \end{pmatrix}^T \quad (45)$$

Après application du roulement, la matrice faisceau est égale à :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \epsilon_1\cos^2\theta A_xA_x^T + \epsilon_2\sin^2\theta A_yA_y^T & \cos\theta\sin\theta(\epsilon_1 A_xA_y^T - \epsilon_2 A_yA_x^T) \\ \cos\theta\sin\theta(\epsilon_1 A_yA_x^T - \epsilon_2 A_xA_y^T) & \epsilon_1\sin^2\theta A_xA_x^T + \epsilon_2\cos^2\theta A_yA_y^T \end{pmatrix} \quad (46)$$

Nous avons donc :

$$\epsilon_x^2 = \det\sigma_{xx} = \epsilon_1^2\cos^4\theta + \epsilon_2^2\sin^4\theta + 2\epsilon_1\epsilon_2\cos^2\theta\sin^2\theta B_{xy} \quad (47)$$

$$\epsilon_y^2 = \det\sigma_{yy} = \epsilon_1^2\sin^4\theta + \epsilon_2^2\cos^4\theta + 2\epsilon_1\epsilon_2\cos^2\theta\sin^2\theta B_{xy} \quad (48)$$

$$(49)$$

avec $B_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\beta_x}{\beta_y} + \frac{\beta_y}{\beta_x} + \frac{(\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x)^2}{\beta_x\beta_y}\right]$

Comme $\det C = \epsilon_x\epsilon_y \det\sigma_{xy}$, nous trouvons :

$$\det C = \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\epsilon_x\epsilon_y}\left[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2(B_{xy} - 1)\right] \quad (50)$$

Il est possible de montrer que $\forall\beta_{x,y}, \alpha_{x,y}, B_{xy} \geq 1$ et que $B_{xy} = 1$ pour $\beta_x = \beta_y$ et $\alpha_x = \alpha_y$. Dans le cas où $B_{xy} = 1$ alors $\det C > 0$. Par contre, dans le cas où les émittances intrinsèques sont égales alors $\det C \leq 0$. Nous avons donc montré qu'il n'y a pas de condition sur le signe de $\det C$.

5.4.2 Cas d'un quadripôle tourné

Le faisceau avant le quadripôle est supposé découplé. Sa matrice est alors de la forme :

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} A_x^{(1)} & 0 \\ 0 & A_y^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 I_2 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x^{(1)} & 0 \\ 0 & A_y^{(1)} \end{pmatrix}^T$$

La ligne de transport après le quadripôle est également supposé ne pas introduire de couplage. Nous savons que sa matrice de transfert peut d'écrire sous la forme :

$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} A_x^{(2)} & 0 \\ 0 & A_y^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O}_x & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x^{(1)} & 0 \\ 0 & A_y^{(1)} \end{pmatrix}^{-1}$$

Insérons un quadripôle mince tourné de force $1/f$ en début de ligne. Sa matrice de transfert est donnée par :

$$R_{\mathrm{QP}} = \begin{pmatrix} I_2 & \frac{K_2}{f} \\ \frac{K_2}{f} & I_2 \end{pmatrix}$$

avec $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Afin d'alléger l'écriture, nous omettrons l'exposant (1) pour désigner la position s_1 correspondant au quadripôle tourné. Après calcul, la matrice faisceau est en bout de ligne :

$$\sigma_{xx} = A_x^{(2)} \left(\epsilon_1 I_2 + \frac{\epsilon_2}{f^2} \mathcal{O}_x K_2 A_y A_y^T K_2^T \mathcal{O}_x^T \right) A_x^{(2)T} \tag{51}$$

$$\sigma_{yy} = A_y^{(2)} \left(\epsilon_2 I_2 + \frac{\epsilon_1}{f^2} \mathcal{O}_y K_2 A_x A_x^T K_2^T \mathcal{O}_y^T \right) A_y^{(2)T} \tag{52}$$

$$\sigma_{xy} = A_x^{(2)} \mathcal{O}_x \left(\epsilon_1 A_x^T K_2^T (A_y^{-1})^T + \epsilon_2 A_x^{-1} K_2 A_y \right) \mathcal{O}_y^T A_y^{(2)T} \tag{53}$$

$$= \frac{\sqrt{\beta_x \beta_y}}{f} A_x^{(2)} \mathcal{O}_x \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}_y^T A_y^{(2)T} \tag{54}$$

On trouve :

$$\epsilon_x^2 = \det \sigma_{xx} = \epsilon_1 \left(\epsilon_1 + \frac{\beta_x \beta_y}{f^2} \epsilon_2 \right) \tag{55}$$

$$\epsilon_y^2 = \det \sigma_{yy} = \epsilon_2 \left(\epsilon_2 + \frac{\beta_x \beta_y}{f^2} \epsilon_1 \right) \tag{56}$$

6 Cas d'un faisceau couplé avec dispersion, d'une optique avec couplage

Dans ce cas, nous rajoutons une cinquième coordonnée au vecteur X correspondant à l'écart relatif en énergie δ. Les matrices faisceau et de transfert prennent alors la forme :

$$R = \begin{pmatrix} R_t & R_\delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_t & \sigma_\delta \\ \sigma_\delta^T & \langle \delta^2 \rangle \end{pmatrix}$$

où R_t est une matrice de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ correspondant au transport dans l'espace transverse. σ_t est la projection de la matrice faisceau dans l'espace transverse. R_δ est un vecteur colonne.

Par commodité, nous posons $\eta_i = \frac{\langle X_i \delta \rangle}{\langle \delta^2 \rangle}$. Posons $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne correspondant à la dispersion du faisceau.

Le transport de la matrice faisceau donne :

$$\sigma_t = R_t \sigma_{0,t} R_t^T + \left\langle \delta^2 \right\rangle \left(R_t \eta_0 R_\delta^T + R_\delta \eta_0^T R_t^T + R_\delta R_\delta^T \right) \tag{57}$$

Considérons maintenant une succession de 2 éléments dont les matrices de transfert respectives sont $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$. La matrice de transfert est alors $R = R^{(2)} R^{(1)}$. Nous avons les relations :

$$R_t = R_t^{(2)} R_t^{(1)} \tag{58}$$

$$R_\delta = R_t^{(2)} R_\delta^{(1)} + R_\delta^{(2)} \tag{59}$$

$$\eta^{(1)} = R_t^{(1)} \eta^{(0)} + R_\delta^{(1)} \tag{60}$$

Utilisons maintenant la factorisation de R_t utilisée à la section 5.1 :

$$R_t = S \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix} \cdot S_0^{-1} \tag{61}$$

avec

$$S = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bI_2 & B \\ J_2 B^T J_2 & bI_2 \end{pmatrix} \tag{62}$$

Posons $\hat{\eta}_0 = S_0 \cdot \eta$ et $\hat{\sigma}_{t,0} = S_0 \cdot \sigma(t, 0 \cdot S_0^T$. L'équation (57) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \sigma_t = S \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix} \cdot \sigma_{0,t} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1^T & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_2^T \end{pmatrix} \cdot S^T + \left\langle \delta^2 \right\rangle \Bigg(R_\delta R_\delta^T + \\ S \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_2 \end{pmatrix} \cdot \hat{\eta}_0 \cdot R_\delta^T + R_\delta \cdot \hat{\eta}_0^T \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1^T & 0 \\ 0 & \mathcal{O}_2^T \end{pmatrix} \cdot S^T \Bigg) \end{aligned} \tag{63}$$

Nous obtenons finalement une formulation des tailles mesurées à différents points de la ligne similaire à celle donée à l'Eq. (11a).

$$\frac{\langle x^2\rangle}{\beta_1} = \begin{bmatrix} b\cos\psi_1 \\ b\sin\psi_1 \\ B_{11}\cos\psi_2 - B_{12}\sin\psi_2 \\ B_{11}\sin\psi_2 + B_{12}\cos\psi_2 \end{bmatrix}^T \hat{\sigma}_{0,t} \begin{bmatrix} b\cos\psi_1 \\ b\sin\psi_1 \\ B_{11}\cos\psi_2 - B_{12}\sin\psi_2 \\ B_{11}\sin\psi_2 + B_{12}\cos\psi_2 \end{bmatrix} +$$

$$\langle\delta^2\rangle \frac{R_{\delta,1}}{\sqrt{\beta_1}} \left(2 \begin{bmatrix} b\cos\psi_1 \\ b\sin\psi_1 \\ B_{11}\cos\psi_2 - B_{12}\sin\psi_2 \\ B_{11}\sin\psi_2 + B_{12}\cos\psi_2 \end{bmatrix}^T \hat{\eta}_0 + \frac{R_{\delta,1}}{\sqrt{\beta_1}} \right) \tag{64a}$$

$$\frac{\langle y^2\rangle}{\beta_2} = \begin{bmatrix} -B_{22}\cos\psi_1 - B_{12}\sin\psi_1 \\ -B_{22}\sin\psi_1 + B_{12}\cos\psi_1 \\ b\cos\psi_2 \\ b\sin\psi_2 \end{bmatrix}^T \hat{\sigma}_{0,t} \begin{bmatrix} -B_{22}\cos\psi_1 - B_{12}\sin\psi_1 \\ -B_{22}\sin\psi_1 + B_{12}\cos\psi_1 \\ b\cos\psi_2 \\ b\sin\psi_2 \end{bmatrix} +$$

$$\langle\delta^2\rangle \frac{R_{\delta,3}}{\sqrt{\beta_2}} \left(2 \begin{bmatrix} -B_{22}\cos\psi_1 - B_{12}\sin\psi_1 \\ -B_{22}\sin\psi_1 + B_{12}\cos\psi_1 \\ b\cos\psi_2 \\ b\sin\psi_2 \end{bmatrix}^T \hat{\eta}_0 + \frac{R_{\delta,3}}{\sqrt{\beta_2}} \right) \tag{64b}$$

$$\frac{\langle xy\rangle}{\sqrt{\beta_1\beta_2}} = \begin{bmatrix} b\cos\psi_1 \\ b\sin\psi_1 \\ B_{11}\cos\psi_2 - B_{12}\sin\psi_2 \\ B_{11}\sin\psi_2 + B_{12}\cos\psi_2 \end{bmatrix}^T \hat{\sigma}_{0,t} \begin{bmatrix} -B_{22}\cos\psi_1 - B_{12}\sin\psi_1 \\ -B_{22}\sin\psi_1 + B_{12}\cos\psi_1 \\ b\cos\psi_2 \\ b\sin\psi_2 \end{bmatrix} +$$

$$\langle\delta^2\rangle \left(\frac{R_{\delta,2}}{\sqrt{\beta_2}} \begin{bmatrix} b\cos\psi_1 \\ b\sin\psi_1 \\ B_{11}\cos\psi_2 - B_{12}\sin\psi_2 \\ B_{11}\sin\psi_2 + B_{12}\cos\psi_2 \end{bmatrix}^T + \frac{R_{\delta,1}}{\sqrt{\beta_1}} \begin{bmatrix} -B_{22}\cos\psi_1 - B_{12}\sin\psi_1 \\ -B_{22}\sin\psi_1 + B_{12}\cos\psi_1 \\ b\cos\psi_2 \\ b\sin\psi_2 \end{bmatrix}^T \right) \hat{\eta}_0 +$$

$$\frac{R_{\delta,1}R_{\delta,2}}{\sqrt{\beta_1\beta_2}} \langle\delta^2\rangle \tag{64c}$$

Il est à noter qu'aux points où $R_\delta = 0$, la taille du faisceau ne dépend pas des valeurs de η ou de $\langle\delta^2\rangle$. Nous avons donc une relation matricielle entre la matrice faisceau $\hat{\sigma}_0$, $\hat{\eta}_0$ et $\langle\delta^2\rangle$ que nous cherchons à déterminer et les tailles faisceaux. Les coefficients de la matrice font apparaitre les avances de phase ψ_1 et ψ_2 ainsi que $\psi_1 \pm \psi_2$. Il est alors nécessaire de choisir judicieusement les positions des détecteurs afin de bien discriminer les différentes mesures. Comme σ comprend 15 paramètres libres (ceux de $\hat{\sigma}_{0,t}$, de $\hat{\eta}_0$ et enfin de $\langle\delta^2\rangle$), au moins 15 mesures sont nécessaires.

7 Conclusion

Nous avons développé un ensemble de factorisisation de la matrice de transport dans le cas où la ligne est couplée et dispersive. Ceci a permis de mettre en valeur les avances de phase permettant de discriminer les paramètres de la matrice sigma selon le point de mesure. Nous avons pu également démontrer certaines propriétés comme le fait que le produit des émittances projetées est toujours supérieur à celui des émittances intrinsèques du faisceau.